

Reprinted from

Canadian Journal of Physics

~~A-1077~~

AIAA Rejected

RECEIVED
A.I.A.A.
73 DEC 17 PM 1:36
T. J. S. LIBRARY

Théorie du Maser au Rubidium 87

M. TESSIER ET J. VANIER

Volume 49 • Number 21 • 1971

(NASA-CR-137085) THEORY OF A RUBIDIUM
87 MASER (Laval Univ.) 11 p

N74-71757

Uncias
00/99 31289

Published by The National Research Council of Canada

Théorie du Maser au Rubidium 87

M. TESSIER ET J. VANIER

C.R.A.M. Laboratoire d'Electronique Quantique, Département du Génie Electrique, Université Laval, Québec 10, Québec

Reçu le 17 mai 1971

On effectue le calcul de la puissance de sortie du maser à rubidium 87 en tenant compte des variations locales du taux de pompage et des termes de la matrice densité associée au problème. Les résultats obtenus confirment assez bien les résultats expérimentaux obtenus à ce jour.

The paper describes calculations made on the power output of the rubidium 87 maser, taking into account local variations of the optical pumping rate and of the density matrix elements associated with the problem. The results obtained agree well with published experimental data.

Canadian Journal of Physics, 49, 2680 (1971)

I. Introduction

Le maser à rubidium (Davidovits 1965) tire son intérêt de sa puissance de sortie relativement grande. Le schéma donné à la Fig. 1 permet d'en comprendre le fonctionnement dans les grandes lignes. Le rubidium à l'état de vapeur saturante est renfermé dans une cavité électromagnétique. On peut aussi utiliser un ballon de quartz lui-même placé dans la cavité pour simplifier les questions de vide. Dans le ballon se trouve un gaz tampon, ordinairement de l'azote sous une pression de l'ordre de 10 Torr. Le gaz tampon réduit la largeur de la raie Doppler et la fréquence des collisions des atomes de rubidium avec les parois; il maintient les atomes approximativement au repos et absorbe les radiations lumineuses réémises qui diminueraient l'efficacité du pompage optique. La lampe au ^{87}Rb est filtrée par une cellule contenant l'isotope ^{85}Rb . Ce filtre retranche du spectre de la lampe, la raie correspondant aux transitions des états $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$ au niveau $F = 2$ de l'état fondamental. La lumière filtrée pénètre dans la cavité et produit des transitions entre le niveau $F = 1$ et les niveaux $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$. Les atomes de rubidium excités dans les états $P_{1/2}$ et $P_{3/2}$ relaxent vers les états $F = 1$ et $F = 2$ de l'état fondamental par suite des collisions avec les atomes d'azote. L'asymétrie de la lumière émise entraîne un déséquilibre de population et si les atomes pompés au niveau $F = 2$ sont en nombre suffisant, on obtient une oscillation auto-entretenu entre les niveaux $F = 2$, $M_F = 0$ et $F = 1$, $M_F = 0$ à la fréquence de 6.835 GHz.

Dans un article de Vanier (1968) sur le maser à rubidium, on trouve une théorie permettant de calculer la puissance fournie par la vapeur de rubidium; toutefois dans un but de simplification, l'auteur a supposé que le taux de pompage Γ des atomes de rubidium ainsi que les différents termes ρ_{ij} de la matrice densité associée au problème étaient constants dans toute la cellule contenant le rubidium. Tout en conservant les autres hypothèses faites dans l'article précité, nous lèverons ces deux dernières, c'est-à-dire que nous tiendrons compte des variations de Γ et des ρ_{ij} en fonction des coordonnées locales. Nous supposons en outre que les raies d'émission de la lampe et d'absorption de la vapeur sont des gaussiennes centrées sur la même fréquence. Le but des calculs est de déterminer les variations de Γ dans la cellule contenant la vapeur de rubidium ainsi que la puissance fournie par la vapeur. Toutes les questions théoriques non abordées ici sont développées dans l'article de Vanier (1968).

II. Calculs

(1) Mise en équation du problème

La cavité de maser renfermant la vapeur étant cylindrique et de révolution (voir Fig. 1) on adopte le système de coordonnées cylindropolaires (z, r, φ) . Le problème ayant une symétrie de révolution par rapport à l'axe de la cavité (pris pour axe des "z"), φ n'intervient pas.

(a) Loi de variation du taux de pompage Γ

Γ est défini par

$$[1] \quad \Gamma(z, r) = \int_0^\infty I(\nu, z, r) \sigma(\nu) d\nu$$

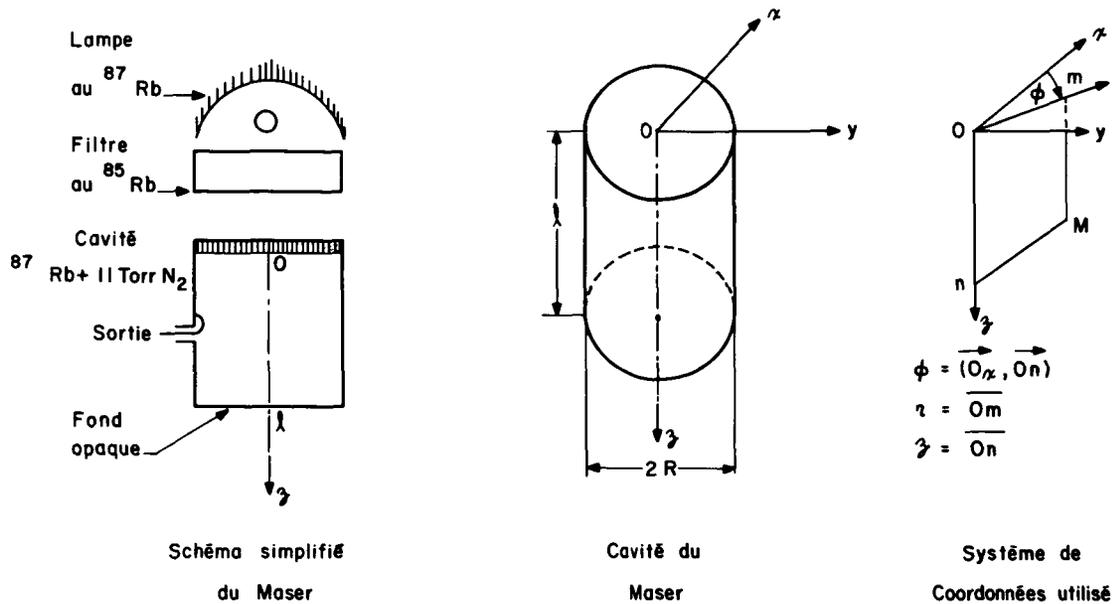


FIG. 1. Schéma simplifié du maser; cavité du maser; système de coordonnées utilisé.

ν est une fréquence quelconque, $I(\nu, z, r)$ désigne l'intensité lumineuse aux points de coordonnées z, r à la fréquence ν , le déplacement longitudinal de la lumière se faisant selon l'axe des z . On admet que $I(\nu, 0, r)$ (intensité d'émission de la source) ne dépend pas de r et peut s'écrire

$$[2] \quad I(\nu, 0, r) = I_0 = I_{00} \exp - \left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{2\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2} \right]^2$$

où ν_0 est la fréquence centrale de la raie, $2\Delta\nu_D$ sa largeur, I_{00} son intensité maximale. $\sigma(\nu)$ représente la section droite d'absorption et on admet qu'on peut écrire

$$[3] \quad \sigma(\nu) = \sigma_0 \exp - \left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2} \right]^2$$

Cette raie est supposée deux fois moins large que la raie d'émission et centrée sur la même fréquence. Cette hypothèse est basée sur des résultats expérimentaux, obtenus à l'aide d'un interféromètre du type Fabry-Pérot (Missout *et al.* 1971). On admet que l'intensité lumineuse décroît longitudinalement selon la loi différentielle ci-dessous:

$$[4] \quad dI(\nu, z, r) = -I(\nu, z, r) \sigma(\nu) n(z, r) dz$$

ce qui revient à dire que la décroissance entre les plans z et $z + dz$ est proportionnelle à l'intensité au plan z , à la section droite d'absorption, à la pénétration dz et au nombre d'atomes absorbants $n(z, r)$ par unité de volume. On montre (Appendice A) que

$$[5] \quad n(z, r) = \frac{3\gamma_1 n_0}{5\Gamma + 8\gamma_1} \left[1 + \frac{16}{3} \frac{\Gamma(\Gamma + \gamma_1)\beta^2}{\gamma_1 \left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma_2 \right) (5\Gamma^2 + 13\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2) + 4\beta^2(2\Gamma^2 + 9\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2)} \right]$$

γ_1 et γ_2 sont respectivement les taux de décroissance des éléments diagonaux et non-diagonaux de la matrice densité; n_0 est le nombre total d'atomes par unité de volume; β est égal à $\frac{1}{2} (\mu_0 H_z / \hbar)$ où μ_0 est le magnéton de Bohr et H_z la composante longitudinale du champ magnétique radiofréquence H_{rf} . La variation locale de H_z a la forme du produit $J_0(\sigma_2 r/R) \sin \pi z/l$ où σ_2 est la 2ième racine non nulle

de $J_1(x) = 0$, J_0 et J_1 étant les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1, R le rayon de la cavité, l sa longueur. Il est commode de mettre β^2 sous la forme

$$[6] \quad \beta^2 = K \langle \beta^2 \rangle J_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{R} r \right) \sin^2 \frac{\pi z}{l}$$

où $\langle \beta^2 \rangle$ est la valeur moyenne de β^2 sur la cavité. La constante K doit alors être égale à $2/J_0^2(\sigma_2)$. On obtient finalement

$$[7] \quad \beta^2 = \frac{2}{J_0^2(\sigma_2)} \langle \beta^2 \rangle J_0^2 \left(\frac{\sigma_2}{R} r \right) \sin^2 \frac{\pi z}{l}$$

On sait (voir Appendice C) que $\langle \beta^2 \rangle$ est lié à la puissance P fournie par la vapeur par la relation

$$[8] \quad 4 \langle \beta^2 \rangle = \frac{8\pi Q_l \eta \mu_0^2}{\omega V_c \hbar^2} P_{\text{diss}}$$

où Q_l est le coefficient de surtension en charge de la cavité, η son coefficient de remplissage défini par

$$\eta = \frac{\int_{V_c} H_z^2 dV}{\int_{V_c} H_{\text{rf}}^2 dV}$$

V_c est le volume de la cavité et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation des oscillations du maser. Pour abrégé, on écrit [8] sous la forme

$$[9] \quad \langle \beta^2 \rangle = K_1 P$$

où

$$[10] \quad K_1 = \frac{8\pi Q_l \eta \mu_0^2}{4\omega V_c \hbar^2}$$

Ces définitions étant posées, on peut écrire [4] sous la forme

$$[11] \quad \frac{dI(v, z, r)}{I(v, z, r)} = -\sigma(v)n(z, r) dz$$

intégrant en z , on obtient

$$[12] \quad \ln \frac{I(v, z, r)}{I_0} = -\int_0^z \sigma(v)n(z, r) dz$$

d'où

$$[13] \quad I(v, z, r) = I_0 \exp -\int_0^z \sigma(v)n(z, r) dz$$

En portant dans [1] on obtient

$$[14] \quad \Gamma(z, r) = \int_0^\infty I_0 \sigma(v) \left[\exp -\sigma(v) \int_0^z n(z, r) dz \right] dv$$

On montre (Appendice B) que $\Gamma(z, r)$ peut alors se mettre sous la forme

$$[15] \quad \Gamma(z, r) = \Gamma_0 \left(1 + \sum_{n=1}^\infty v_n \right)$$

où

$$[16] \quad \Gamma_0 = \Gamma(0, r) = \frac{I_{00} \sigma_0 \Delta v_D \sqrt{\pi}}{2\sqrt{1.25 \ln 2}}$$

et

$$[17] \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n! \sqrt{\frac{n+1.25}{1.25}}} \left[\int_0^z \sigma_0 n(z, r) dz \right]^n$$

$n(z, r)$ dépend de Γ et de β^2 , β^2 étant lié à P par l'éq. 8.

(b) *Equation du régime auto-entretenu*

La puissance libérée dans la couronne élémentaire $2\pi r dr dz$ comprise entre les plans $z + dz$ et z , et entre les cylindres r et $r + dr$, est donnée par

$$[18] \quad d^2P = \frac{h\nu n_0 2\pi r dr dz 4K_1 P \frac{J_0^2\left(\frac{\sigma_2}{R} r\right)}{J_0^2(\sigma_2)} \sin^2 \frac{\pi z}{l} \Gamma(z, r) A(\Gamma)}{\gamma_1 \left[\frac{1}{2}\Gamma(z, r) + \gamma_2\right] + 8K_1 P \frac{J_0^2\left(\frac{\sigma_2}{R} r\right)}{J_0^2(\sigma_2)} \sin^2 \frac{\pi z}{l} [1 - \Gamma(z, r) B(\Gamma)]}$$

Cette équation se dérive comme la formule [18] de l'article de Vanier (1968). $A(\Gamma)$ et $B(\Gamma)$ sont donnés, d'après les formules [19] et [20] de cet article par

$$[19] \quad A(\Gamma) = \frac{\gamma_1(\Gamma + \gamma_1)}{5\Gamma^2 + 13\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2}$$

$$[20] \quad B(\Gamma) = \frac{3\Gamma + 4\gamma_1}{5\Gamma^2 + 13\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2}$$

Comme

$$P = \int_0^l \int_0^R d^2P$$

P doit satisfaire à

$$[21] \quad 1 = 8\pi h\nu K_1 n_0$$

$$\times \int_0^l \int_0^R \frac{J_0^2\left(\frac{\sigma_2}{R} r\right) \sin^2 \frac{\pi z}{l} \Gamma(z, r) A(\Gamma) r dr dz}{\gamma_1 J_0^2(\sigma_2) \left[\frac{1}{2}\Gamma(z, r) + \gamma_2\right] + 8K_1 P J_0^2\left(\frac{\sigma_2}{R} r\right) \sin^2 \frac{\pi z}{l} [1 - \Gamma(z, r) B(\Gamma)]}$$

(2) *Résolution*

Pour résoudre [21], il faut connaître $\Gamma(z, r)$. Or $\Gamma(z, r)$ dépend de P par l'intermédiaire de $n(z, r)$. On pratique donc comme suit: on se donne Γ_0 (ou ce qui revient au même I_{00}) et on démarre avec $P = 0$. On détermine alors $\Gamma(z, r)$ d'après [15]. Pour ce faire, supposons connu $\Gamma(z, r)$. Pour calculer $\Gamma(z + dz, r)$, on évalue le 2ième membre de [13] en supposant que $\Gamma(z + dz, r) = \Gamma(z, r)$. En procédant par itération, on obtient $\Gamma(z + dz, r)$ avec la précision voulue. Comme on connaît $\Gamma(0, r) = \Gamma_0$, on peut de proche en proche déterminer $\Gamma(z, r)$ pour tout z . Il faut alors résoudre [21], ce qui conduit à une valeur de P . On recalcule alors $\Gamma(z, r)$ en utilisant cette valeur de P et on

itère. En pratique on obtient des résultats satisfaisants après 3 ou 4 itérations; la méthode a été comparée avec la solution analytique qu'on peut obtenir dans certains cas particuliers et la divergence était de l'ordre de 10^{-4} en valeur relative.

Le calcul a été effectué avec les valeurs numériques suivantes représentant de près la situation expérimentale.

$$\omega = 2\pi \times 6.8 \times 10^9 \text{ rad/s, } l = 8 \text{ cm, } R = 5 \text{ cm}$$

De plus on ne fait pas de différence entre les raies D_1 et D_2 émises par la lampe; on fait cette hypothèse dans le but de simplifier les calculs et on pose alors comme valeur approchée $\sigma_0 = 2 \times 10^{-11} \text{ cm}^2$.

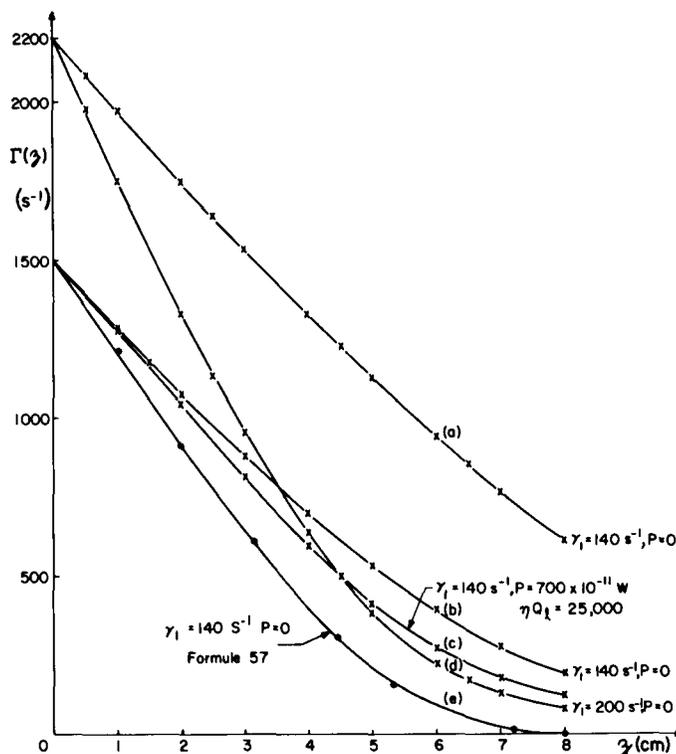


FIG. 2. Courbes de variations du taux de pompage Γ en fonction de la pénétration z dans la cellule. (La formule 57 mentionnée réfère à l'article Vanier (1968).)

On a admis les relations suivantes données par Vanier (1968):

$$n_0 = \frac{\gamma_1 - 10}{6.4} 10^{10} \text{ atomes/cm}^3$$

et $\gamma_2 = 63 + \frac{5}{8}(\gamma_1 - 10)$

γ_1 , ηQ_1 et Γ_0 sont des paramètres dont on fixe les valeurs pour chaque cas envisagé. Les calculs numériques ont été faits sur APL/360.

(3) Résultats

(a) Taux de pompage

On a obtenu de nombreuses courbes de variations dans différents cas. On donne ici un résumé de résultats significatifs (Fig. 2).

1. Cas où $P = 0$

Ce cas est celui des seuils d'oscillations. Les eqs. 15 et 21 sont alors indépendantes de r . Donc, dans ce cas, $\Gamma(z, r)$ ne dépend pas de r .

On constate que $\Gamma(z)$ décroît fortement lorsque le faisceau lumineux s'enfonce dans la cavité. L'hypothèse supposant $\Gamma(z)$ constant dans la

cavité est donc peu réaliste. $\Gamma(z)$ décroît d'abord linéairement, puis exponentiellement. Pour $\Gamma_0 = 2200 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 = 140 \text{ s}^{-1}$, $P = 0$ la zone exponentielle est à peine atteinte; dans tous les autres cas elle l'est nettement et on voit qu'au fond de la cavité $\Gamma(z)$ ne dépasse pas quelques centièmes de Γ_0 . D'autre part la décroissance est d'autant plus forte que le taux de retour à l'équilibre γ_1 est plus élevé (comparer les courbes $\Gamma_0 = 2200 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 = 140 \text{ s}^{-1}$, $P = 0$ et $\Gamma_0 = 2200 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 = 200 \text{ s}^{-1}$, $P = 0$).

2. Cas où $P \neq 0$

Dans ce cas le taux de pompage dépend de r par l'intermédiaire du produit $K_1 P J_0^2 (\sigma_2 r/R) \sin^2 (\pi z/l)$ uniquement. Pour obtenir $\Gamma(z, r)$ une fois Γ_0 et P fixés, on se fixe r et on détermine $\Gamma(z, r)$ pour cette valeur de r . On constate que pour r fixé, la décroissance de Γ en fonction de z est d'autant plus forte que P est grande: on peut comparer à cet effet les courbes $\Gamma_0 = 1500 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 = 140 \text{ s}^{-1}$, $P = 0$ et $\Gamma_0 = 1500 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 = 140 \text{ s}^{-1}$, $P = 700 \times 10^{-11} \text{ W}$.

Si maintenant P étant fixé on fait varier r ,

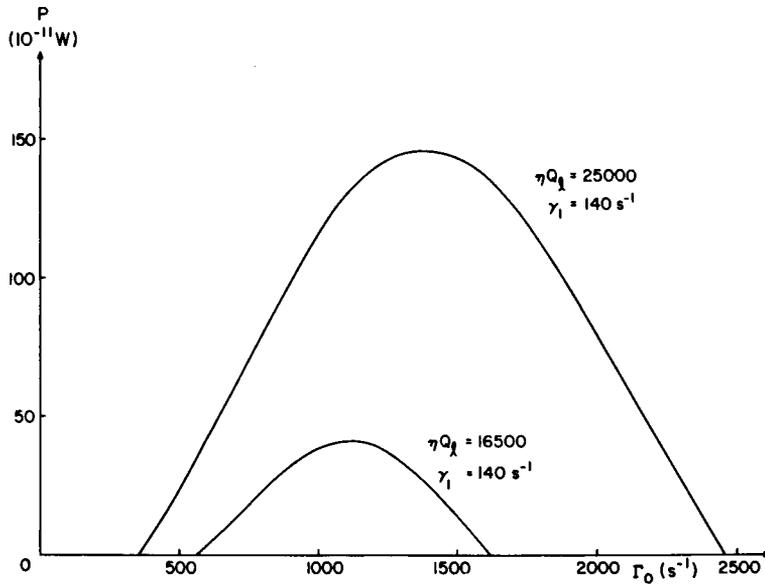


FIG. 3. Courbes $P = f(\Gamma_0)$ de variation de la puissance P en fonction de Γ_0 .

comme seul importe le produit $P J_0^2 (\sigma_2 r/R)$ et que d'après ce qui vient d'être vu la décroissance est d'autant plus forte qu'il est grand, la décroissance sera d'autant plus forte que $J_0^2 (\sigma_2 r/R)$ sera grand. On a donc une modulation transversale du faisceau. C'est sur l'axe de la cavité que la décroissance de Γ en fonction de z est la plus grande ($J_0(0) = 1$); elle est minimale sur les cercles nodaux où $J_0(\sigma_2 r/R) = 0$.

La variation de $\Gamma(z, r)$ se présente donc comme une décroissance selon z modulée transversalement et d'autant plus forte que γ_1, P et ηQ_1 sont plus grands.

REMARQUE: Si on calcule $\Gamma(z)$ par la formule [57] de Vanier (1968), formule obtenue en supposant des spectres rectangulaires d'émission et d'absorption et $P = 0$, on obtient une décroissance beaucoup plus rapide de $\Gamma(z)$, comme on peut le voir en comparant les courbes $\Gamma_0 = 1500 s^{-1}, \gamma_1 = 140 s^{-1}, P = 0$, formule [57], et $\Gamma_0 = 1500 s^{-1}, \gamma_1 = 140 s^{-1}, P = 0$.

(b) Puissance fournie par la vapeur

On a tracé sur la Fig. 3 les courbes $P = f(\Gamma_0)$ pour $\gamma_1 = 140 s^{-1}$, $\eta Q_1 = 16500$ et $\eta Q_1 = 25000$, ainsi que la courbe $P_{max} = g(\gamma_1)$ de la variation des maxima de $P = f(\Gamma_0)$ pour différentes valeurs de γ_1 et $\eta Q_1 = 16500$ (Fig. 4). On a également relevé les seuils d'oscillations (valeurs minimales et maximales de Γ_0 entre lesquelles il y a oscillations) en fonction de γ_1 pour ηQ_1 fixé

(Fig. 5), et en fonction de ηQ_1 pour γ_1 fixé (Fig. 6).

Les courbes $P = f(\Gamma_0)$ tracées ressemblent à celles qu'a obtenues Vanier (1968) dans son calcul théorique, mais les valeurs des puissances obtenues ici sont plus faibles; ainsi là où il obtient

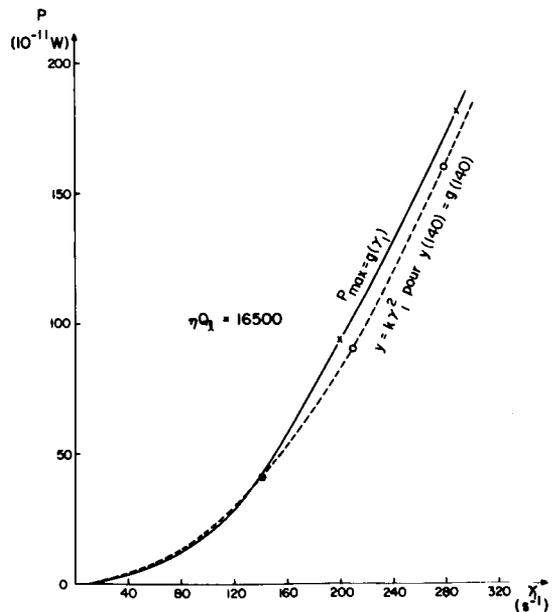


FIG. 4. Courbe $P_{max} = g(\gamma_1)$ de variation des maxima de $P = f(\Gamma_0)$.

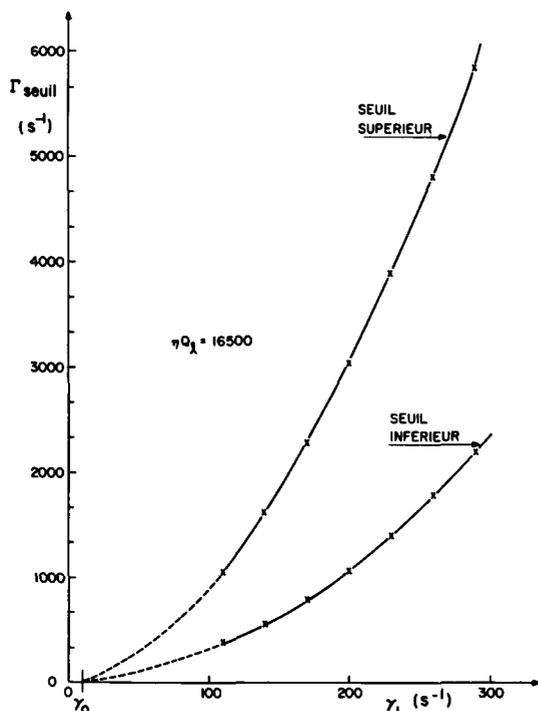


FIG. 5. Seuils d'oscillations en fonction de γ_1 (ηQ_l fixé).

un maximum de 200×10^{-11} W, nous obtenons un maximum de 40×10^{-11} W.

On note que la puissance est très sensible à la quantité ηQ_l . Ainsi $P_{\text{max}} = 0$ pour $\eta Q_l = 13\,000$, $P_{\text{max}} = 41 \times 10^{-11}$ W pour $\eta Q_l = 16\,500$ et $P_{\text{max}} = 146 \times 10^{-11}$ W pour $\eta Q_l = 25\,000$. Toutefois, P_{max} tend vers une limite quand ηQ_l augmente indéfiniment. Dans les exemples donnés l'augmentation est rapide parce que nos valeurs de ηQ_l sont proches de la valeur de ηQ_l minimale permettant les oscillations. Ces résultats sont intéressants dans le cas des masers où un ballon de quartz est utilisé et où ηQ_l est réduit par la présence du quartz (Tessier et Vanier 1971).

La courbe $P_{\text{max}} = g(\gamma_1)$ est assez proche d'une parabole, ce qui montre que P_{max} est en gros proportionnel à γ_1^2 , ou ce qui revient au même, au carré de la densité n_0 .

La plage de valeurs de Γ_0 pour lesquelles il y a oscillations s'élargit lorsque γ_1 (ou le nombre d'atomes) augmente, et aussi lorsque ηQ_l augmente.

Dans l'hypothèse des raies rectangulaires (voir remarque en 3a), P_{max} en fonction de γ_1 passe par un maximum puis s'annule.

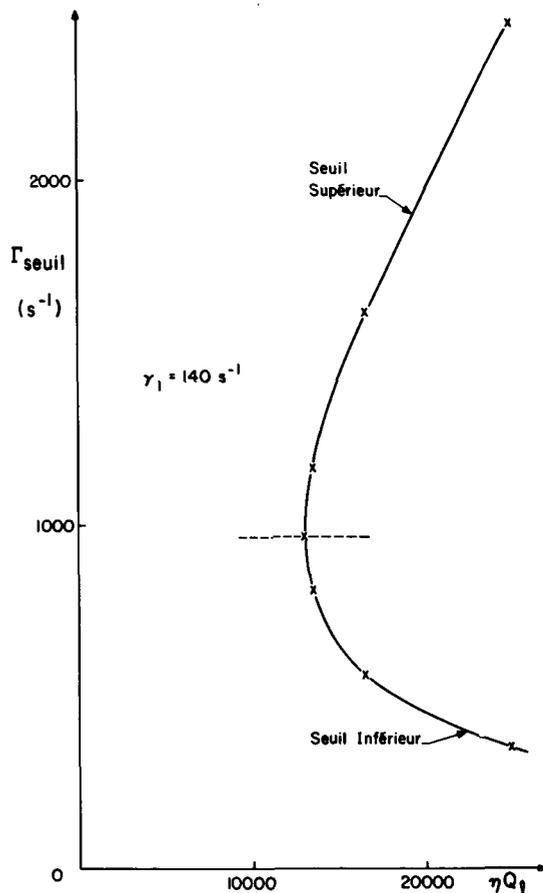


FIG. 6. Seuils d'oscillations en fonction de ηQ_l (γ_1 fixé).

III. Comparaison avec les résultats expérimentaux

L'ordre de grandeur de P_{max} est correct. Pour $Q_l = 30\,000$ Vanier (1968) a mesuré $P_{\text{max}} = 45 \times 10^{-11}$ W. Il est difficile d'avoir une mesure précise de η . Si l'on admet que $\eta \approx 0.7$, ce qui donne $\eta Q_l = 21\,000$, on peut, en interpolant d'après les courbes de la Fig. 3, dire que la théorie donne $P_{\text{max}} = 90 \times 10^{-11}$ W.

Le chevauchement des plages d'oscillations pour différentes valeurs de γ_1 est en accord avec l'expérience (voir Vanier 1968 et Bazarov 1969; il faut noter que les résultats de Vanier (1968) sont présentés en fonction d'un taux de pompage Γ' mesuré expérimentalement; lorsque ces résultats sont présentés en fonction de Γ_0 , les courbes $P = f(\Gamma_0)$ ont la même allure que celles données par Bazarov (1969)). De même l'élargissement de

ces plages lorsque γ_1 augmente est conforme à l'expérience (Bazarov 1969).

Le fait que les maxima de puissance sont approximativement proportionnels au carré de γ_1 est un résultat en accord avec les expériences de Bazarov (1969). Cet accord conduit à rejeter l'hypothèse simplificatrice de raies optiques de

forme rectangulaire qui donne un résultat non conforme avec ces expériences.

Il est à noter que les courbes $P = f(\Gamma_0)$ présentent au voisinage du seuil d'oscillations inférieur un point d'inflexion et que ce phénomène est visible sur les résultats expérimentaux de Bazarov (1969).

Appendice A

Pour les notations, on est prié de se reporter à l'article de Vanier (1968). On sait que $n(z, r) = n_0(\rho_{66} + \rho_{77} + \rho_{88})$. On obtient en additionnant membre à membre les éqs. 15 et 16 de l'article précité

$$[A1] \quad \rho_{66} + \rho_{77} + \rho_{88} = \frac{\frac{3}{8}\gamma_1 - 2\beta \operatorname{Im} \rho_{73} \exp - i\omega t}{\frac{5}{8}\Gamma + \gamma_1}$$

On obtient en résolvant le système des éqs. 13 à 17 du même article l'égalité

$$[A2] \quad \operatorname{Im} \rho_{73} \exp - i\omega t = \frac{-\beta\Gamma A(\Gamma)}{\left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma_2\right)\gamma_1 + 4[1 - \Gamma B(\Gamma)]\beta^2}$$

D'où

$$[A3] \quad n(z, r) = n_0 \frac{\frac{3}{8}\gamma_1 \left[\left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma_2\right)\gamma_1 + (1 - \Gamma B)4\beta^2 \right] + 2\beta^2 A(\Gamma)\Gamma}{\left(\frac{5\Gamma}{8} + \gamma_1\right) \left[\left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma_2\right)\gamma_1 + 4[1 - \Gamma B(\Gamma)]\beta^2 \right]}$$

Remplaçant $A(\Gamma)$ et $B(\Gamma)$ par leurs expressions selon [19] et [20], on obtient finalement

$$[A4] \quad n(z, r) = \frac{\frac{3}{8}\gamma_1 n_0}{\frac{5}{8}\Gamma + \gamma_1} \times \left[1 + \frac{16}{3} \frac{\Gamma(\Gamma + \gamma_1)\beta^2}{\gamma_1 \left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma_2\right) (5\Gamma^2 + 13\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2) + 4\beta^2(2\Gamma^2 + 9\gamma_1\Gamma + 8\gamma_1^2)} \right]$$

Appendice B

On part de

$$[B1] \quad \Gamma(z, r) = \int_0^\infty I_0\sigma(v) \left[\exp -\sigma(v) \int_0^z n(z, r) dz \right] dv$$

En remplaçant l'exponentielle par son développement en série, on obtient

$$[B2] \quad \Gamma(z, r) = \int_0^\infty I_0\sigma(v) \left\{ \sum_0^\infty \frac{\left[-\sigma(v) \int_0^z n(z, r) dz \right]^n}{n!} \right\} dv$$

En renversant l'ordre des symboles \int et Σ , opération licite car la série converge absolument, on obtient

$$[B3] \quad \Gamma(z, r) = \sum_0^\infty \left\{ \int_0^\infty I_0\sigma(v) \frac{\left[-\sigma(v) \int_0^z n(z, r) dz \right]^n}{n!} dv \right\} = \sum_0^\infty u_n$$

où

$$[B4] \quad u_n = \int_0^\infty I_{00} \exp \left[\frac{-2(v - v_0)}{2\Delta v_D} \sqrt{\ln 2} \right]^2 \sigma_0^{n+1} \exp -(n+1) \left[\frac{2(v - v_0)}{\Delta v_D} \sqrt{\ln 2} \right]^2 \\ \times \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^z n(z, r) dz \right)^n dv$$

soit

$$[B5] \quad u_n = \int_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \sigma_0^{n+1} I_{00} \left[\int_0^z n(z, r) dz \right]^n \exp -(n+1 + \frac{1}{4}) \left[\frac{2(v - v_0) \sqrt{\ln 2}}{\Delta v_D} \right]^2 dv$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -a^2 x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

avec ici

$$a^2 = (n+1 + \frac{1}{4}) \frac{(2\sqrt{\ln 2})^2}{(\Delta v_D)^2}$$

soit

$$a = \frac{(n+1 + \frac{1}{4})^{1/2} 2\sqrt{\ln 2}}{\Delta v_D}$$

et que $v_0 \gg \Delta v_D$, on a

$$[B5] \quad u_n = \frac{(-1)^n \Delta v_D \sqrt{\pi}}{n! (n+1.25)^{1/2} 2\sqrt{\ln 2}} I_{00} \sigma_0 \left[\int_0^z \sigma_0 n(z, r) dz \right]^n$$

soit

$$u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln 2}} \Delta v_D I_{00} \sigma_0 \frac{(-1)^n}{n! (n+1.25)^{1/2} 2\sqrt{\ln 2}} \left[\int_0^z \sigma_0 n(z, r) dz \right]^n$$

On note que $\Gamma(0, r) = \Gamma_0$ est indépendant de r et égal à

$$[B6] \quad u_0 = \frac{\Delta v_D I_{00} \sigma_0 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln 2} \sqrt{1.25}}$$

On peut donc écrire

$$[B7] \quad \Gamma(z, r) = \Gamma_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \right)$$

où

$$[B8] \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n! \sqrt{\frac{n+1.25}{1.25}}} \left[\int_0^z \sigma_0 n(z, r) dz \right]^n$$

Appendice C

On a $\beta = \frac{1}{2}(\mu_0 H_z / \hbar)$; donc

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\mu_0^2}{4V_c \hbar^2} \int_{V_c} |H_z|^2 dV$$

Comme par définition

$$Q_l = \frac{\omega \int_{V_c} |H_{rl}|^2 dV}{8\pi P_{\text{diss}}} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\int_{V_c} |H_z|^2 dV}{\int_{V_c} |H_{rl}|^2 dV}$$

P_{diss} étant la puissance dissipée par pertes sur les parois de la cavité, on voit que

$$\int_{V_c} |H_z|^2 dV = \frac{8\pi\eta Q_i}{\omega}$$

donc

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{8\pi\mu_0^2 \eta Q_i P_{\text{diss}}}{4V_c h^2 \omega}$$

Remerciements

Nous tenons à remercier le professeur W. Happer qui a contribué à la formulation du problème ainsi que M. Tétu pour ces critiques constructives lors de la rédaction de cet article. Ces travaux ont été rendus possibles grâce à des octrois de la NASA et du Conseil national de recherches du Canada.

- BAZAROV, E. N. and GUBIN, V. P. 1969. *Radio Eng. Electron. Phys.* **14**, No. 6.
 DAVIDOVITS, P. 1965. *Appl. Phys. Lett.* **6**, 20.
 MISSOUT, G., VAILLANCOURT, R., TÉTU, M. et VANIER, J. 1971. *Rev. Phys. Appl.* A paraître (septembre).
 TESSIER, M. et VANIER, J. 1971. *Can. J. Phys.* **49**, 1482.
 VANIER, J. 1968. *Phys. Rev.* **168**, 129.